



**Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана**

Методическое указание

Н. Ю. Терехова

Фрактальная графика

МГТУ имени Н.Э. Баумана

**Федеральное агентство по образованию
Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана**

Терехова Н.Ю.

Фрактальная графика

**Методические указания к лекциям и
лабораторным работам по курсу “ Основы графического
дизайна”**

Москва - 2008

УДК 681.327.1(075)
ББК32.973-044я7

Терехова Н.Ю.

Фрактальная графика: методические указания к лекциям и лабораторным работам по курсу «Основы графического дизайна» М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006 г. - 24 с.

Данные методические указания содержат материалы к лекциям и лабораторным работам по курсу «Основы графического дизайна».

Для студентов обучающихся по направлению «Дизайн», изучающих дисциплину «Основы графического дизайна».

УДК 681.327.1(075)
ББК32.973-044я7

Терехова Наталия Юрьевна
Фрактальная графика.

Методические указания к лекциям и лабораторным работам по курсу
«Компьютерная графика»

Московский государственный
технический университет
им. Н.Э.Баумана, 2008

1. Введение

Компьютерная графика – это наука, предметом изучения которой является создание, хранение и обработка изображений с помощью ЭВМ, а в том случае, если пользователь может управлять характеристиками построенных объектов, говорят об интерактивной компьютерной графике.

Работа с компьютерной графикой – одно из самых популярных направлений использования персонального компьютера, причем занимаются этой работой не только профессиональные художники и дизайнеры, часто приходится обходиться собственными силами и доступными программными средствами.

Необходимость широкого использования графических программных продуктов стала особенно ощутимой в связи с развитием Интернета. Даже беглого просмотра компьютерного материала достаточно, чтобы понять, что страница, оформленная без компьютерной графики, не имеет шансов выделиться на фоне широчайшего круга конкурентов и привлечь к себе массовое внимание. Для разработки качественной продукции с элементами графики, работа над которой занимает до 90% общего рабочего времени, на помощь приходят современные программные средства. Они разрабатываются с таким расчетом, чтобы не только дать удобные инструменты профессионалам, но и предоставить возможность для продуктивной работы и тем, кто не имеет необходимых профессиональных навыков и врожденных способностей к художественному творчеству.

Компьютерную графику подразделяют на растровую, векторную, фрактальную и трехмерную графику. Они различаются принципами формирования изображения при отображении на экране монитора или при печати на бумаге.

Растровую графику применяют при разработке мультимедийных и полиграфических изданий. Большинство графических редакторов, предназначенных для работы с растровыми иллюстрациями, ориентированы не столько на создание изображения, сколько на их обработку. Иллюстрации, выполненные средствами растровой графики, редко создаются вручную с помощью компьютерных программ. Чаще для этой цели сканируют иллюстрации, подготовленные на бумаге или фотографии. В последнее время для ввода растровых изображений в компьютер нашли широкое применение цифровые фото и видео камеры.

Программные средства для работы с векторной графикой наоборот предназначены, в первую очередь, для создания иллюстраций и в меньшей степени для их обработки. Существуют примеры высокохудожественных произведений, созданных средствами векторной графики.

Трехмерную графику обычно выделяют среди других видов компьютерной графики. 3D- моделирование - это искусство создание ощущения объема объектов на плоском экране монитора или печатной странице. Для работы с трехмерной графикой в настоящее время широко используют программные продукты такие как 3D Studio, 3D Studio VIZ, MAX и др.

Программные средства для работы с фрактальной графикой предназначены для автоматической генерации изображения путем математических расчетов. Fractal Design, Bryce, Art Dabbler, Ultra Fractal, Fractal, Explorer, XaoS, Fractint, Chaoscope, Apophysis, RPS/Fract, P.Fract, EyeFract, Mfract, Gnofract 4D, IFS Illusions – программы для создания изображений фракталов.

Создание фрактальной художественной композиции состоит не в рисовании или оформлении, а в программировании. Изображение строится по уравнению (или по системе уравнений), поэтому ничего, кроме формулы, хранить в памяти компьютера не надо. Изменяя коэффициенты в уравнении, можно получать совершенно не похожие друг на друга графические изображения.

2. Определение фрактала.

Слово фрактал образовано от латинского *fractus* и в переводе означает *состоящий из фрагментов*, дроблённый. Оно было предложено Бенуа Мандельбротом в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур.

Определение фрактала, данное Б. Мандельбротом, звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому».

Рождение фрактальной геометрии как отдельного раздела математики принято связывать с выходом в 1977 году книги Б. Мандельброта («Фрактальная геометрия природы») (*The Fractal Geometry of Nature*). В его работах были использованы научные результаты и других ученых, работавших в период 1875-1925 годов в той же области (Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф).

Фрактальная геометрия - это изящный способ описания сложного. Природа довольно часто выражает себя во фрактальных формах. Фракталы можно довольно часто увидеть в живой природе: это снежинки, лепестки цветов, морские побережья, русла рек, очертания облаков. Деревья тоже имеют фрактальное строение. На рис. 1 показана фотография ели и искусственная фрактальная структура, генерируемая итерационными уравнениями. По внешнему виду она напоминает живое дерево.

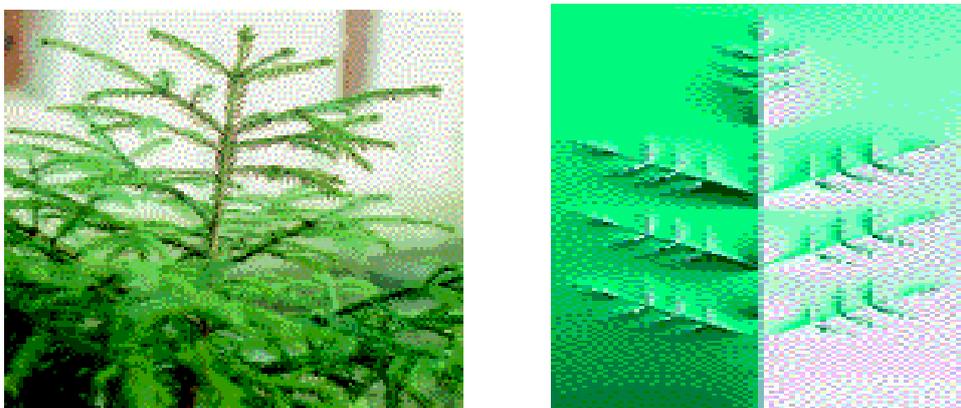


Рис 1. Фотография и фрактальная структура.

На рис 2. представлена фотография крымской сосны (слева) и полученная искусственная фрактальная структура (справа), которые удивительно похожи.

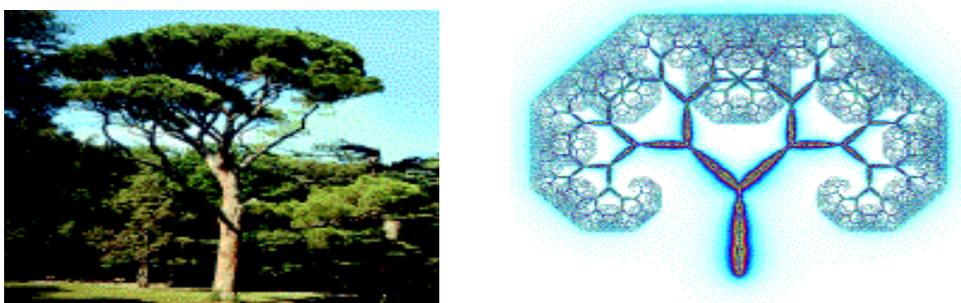


Рис 2. Фотография и фрактальная структура.

Как видно, фракталы обладают завидной эстетической привлекательностью.

3. Классификация фракталов.

По типу фрактальных алгоритмов, фракталы подразделяют на детерминированные (алгебраические и геометрические) и стохастические. Детерминированные алгоритмы абсолютно воспроизводимы. Они дают идентичные изображения независимо от числа повторений.

Термин «стохастичность» происходит от греческого слова, обозначающего «предположение». Стохастические алгоритмы дают большее разнообразие форм благодаря элементам управляемой случайности. Фрактальное изображение получается неповторимым, что иногда является недостатком из-за невозможности заранее предвидеть результаты длительного расчета.

Преобразуемые элементы в процессе фрактального построения могут перемещаться, вращаться, сжиматься, отражаться. Поэтому, по принципу преобразования элементов между итерациями (или уровнями рекурсии), фракталы подразделяют на линейные, нелинейные и объемные.

По характеру изменения объема пространства, занимаемого фрактальными объектами между соседними уровнями рекурсии, алгоритмы и производимые ими объекты делят на аддитивные и субтрактивные. У аддитивных фракталов происходит приращение вещества, а у субтрактивных, его сокращение.

Аддитивными называются те фрактальные объекты, в процессе построения которых появляются новые элементы, увеличивающие объем занимаемого фракталом пространства.

Субтрактивными называются те фракталы, предельный элемент или объем которых стремится к нулю.

3.1. Геометрические фракталы

Геометрические фракталы исследовались математиками в XIX веке. Фракталы этого класса - самые наглядные, потому что в них сразу видна самоподобность.

Объект называют самоподобным, когда увеличенные части объекта походят на сам объект и на друг друга.

В двухмерном случае геометрические фракталы получают, задав некоторую ломаную (или поверхность в трехмерном случае), называемую генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяют на ломаную - генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного числа повторений этой процедуры получается фрактальная кривая, т.е. геометрический фрактал. При видимой сложности полученной кривой, её общий вид задается только формой генератора.

Примерами таких кривых служат кривая Коха, кривая Леви, кривая Минковского, кривая Пеано, кривая Хартера - Хейтуэя. К геометрическим фракталам также относят треугольник Серпинского, множество Кантора, ковер Серпинского, губку Менгера, дерево Пифагора.

3.1.1. Кривая Коха

Кривая Коха - один из самых типичных детерминированных фракталов. Она была получена в девятнадцатом веке немецким математиком Хельге фон Кох, который, изучая работы Георга Кантора и Карла Вейерштрассе, натолкнулся на описания некоторых странных кривых с необычным поведением.

Построение начинается с отрезка единичной длины (Рис.3) - это 0-е поколение кривой Коха. Далее, каждый отрезок заменяется на линию - генератор. В результате такой замены получается следующие поколения кривой Коха. В данном случае, каждое поколение - это кривая из четырех прямолинейных звеньев. Длина каждого последующего отрезка равна $1/3$ длины предыдущего отрезка. Кривая n -го поколения при любом конечном n называется

предфракталом. На рис.3 представлены построенные пять поколений кривой. При n стремящемся к бесконечности, кривая Коха становится фрактальным объектом.

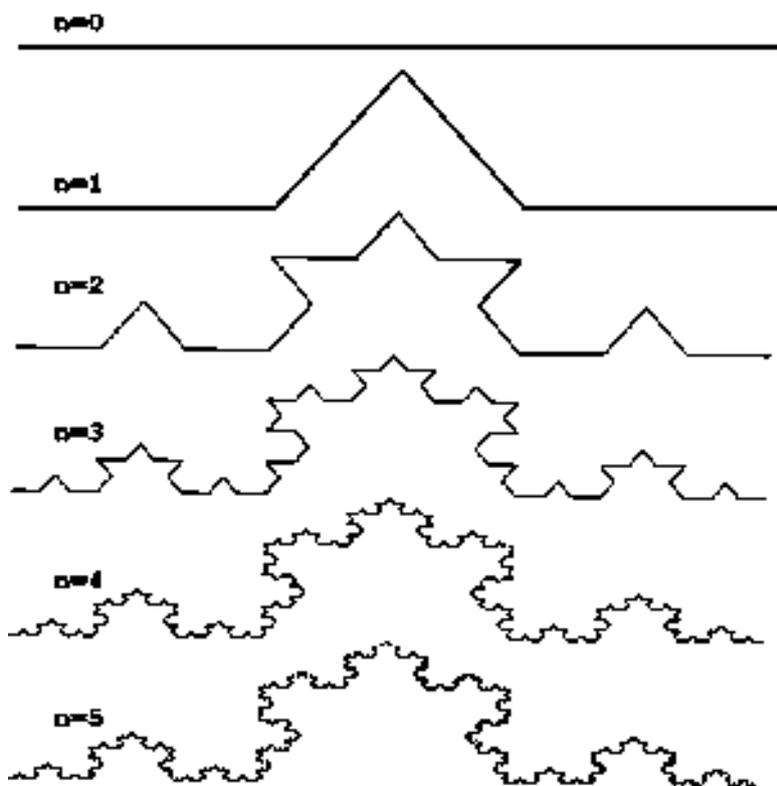


Рис 3. Построение кривой Коха.

3.1.2. Фрактальный треугольник.

Простейшим фрактальным объектом является фрактальный треугольник (Рис.4). Алгоритм его построения следующий. Построить равносторонний треугольник со стороной a , разделить каждую его сторону на три равных отрезка. На среднем отрезке каждой стороны построить внешний равносторонний треугольник со стороной, равной $1/3$ стороны исходного треугольника. На внешних отрезках полученных треугольников, построить равносторонние треугольники, со стороной, равной $1/9 a$. Повторять операцию n раз. Фрактальный треугольник можно достраивать до бесконечности. Треугольники последующих поколений наследуют свойства родительских структур.

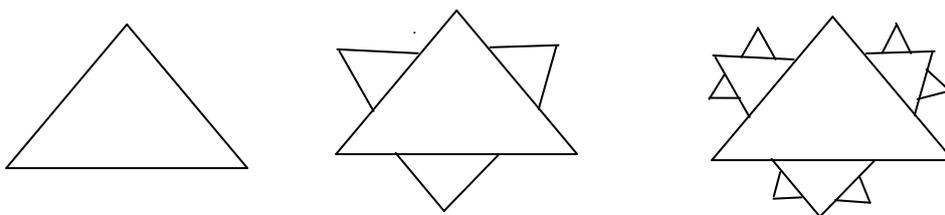


Рис.4. Построение фрактального треугольника.

3.2.3. Площадные геометрические фракталы.

Строительными элементами площадных геометрических фракталов служат плоские полигоны, чаще всего трех- и четырехугольники.

Одним из известных площадных геометрических фракталов является треугольник Серпинского. Этот фрактал, предложенный польским математиком Серпинским в 1915 году, известен также как «решётка» или «салфетка» Серпинского. Он строится путем разбиения треугольника (не обязательно равностороннего) средними линиями на четыре подобных треугольника. (Рис. 5.) Затем все полученные треугольники (за исключением центрального) разбиваются рекурсивно опять на четыре подобных треугольника и т.д. до получения площадных элементов желаемого или минимально видимого разрешения.

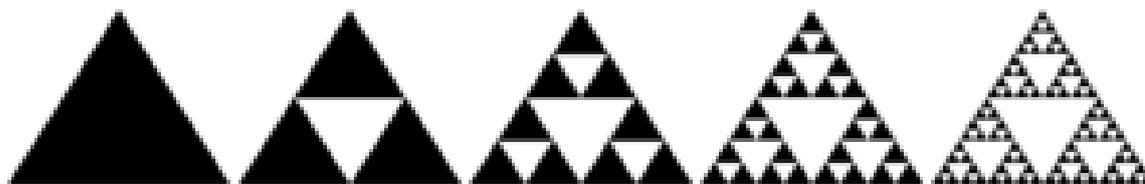


Рис. 5. Треугольник Серпинского

3.1.4. Фрактал Хартера-Хейтуэя.

Рассмотрим фрактальный объект, где образующим элементом являются два равных отрезка, соединенных под прямым углом. В нулевом поколении единичный отрезок заменяется на образующий элемент так, чтобы прямой угол находился сначала снизу, потом сверху единичных отрезков. На рис.6 представлены несколько первых поколений и 11-е поколение кривой, построенной по вышеописанному принципу. Предельная фрактальная кривая (при n стремящемся к бесконечности) называется «драконом» Хартера - Хейтуэя.

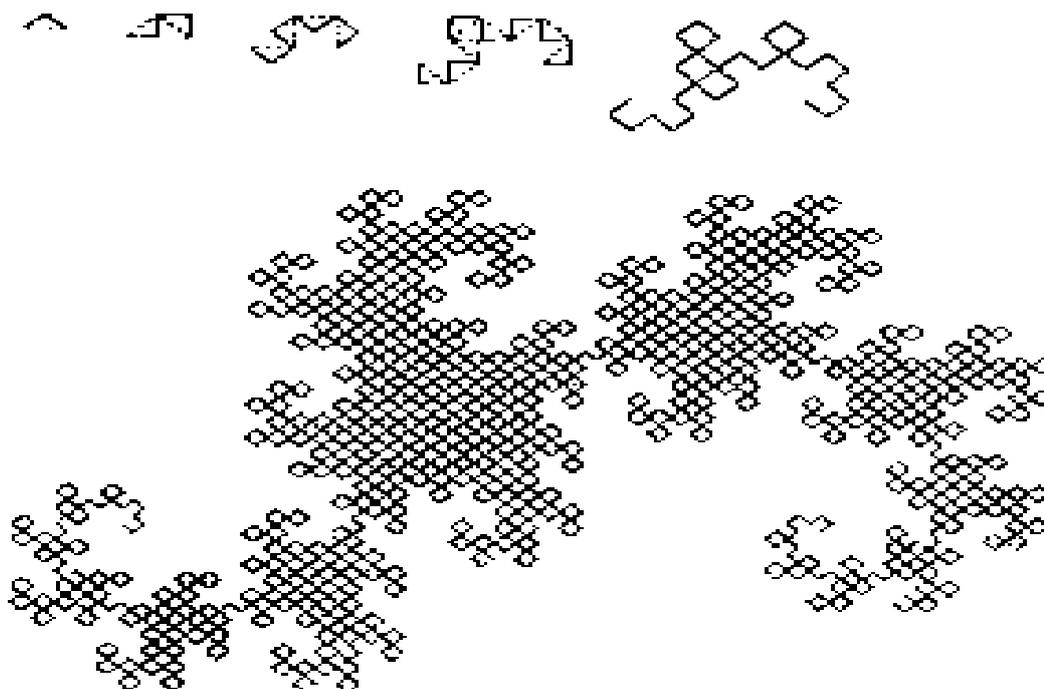


Рис 6. Построение фрактала Хартера-Хейтуэя.

3.1.5. Линейные геометрические фракталы.

Наиболее известным линейным геометрическим фракталом является ветвь папоротника. Алгоритм ее построения основан на подобию построения всей ветви папоротника каждому ее листу. Заключим оригинальное изображение ветви в прямоугольное окно и проведем необходимые линейные и угловые измерения между опорными точками $p_0 - p_5$, лежащими на концах ветви и двух нижних листьев.

Вычислим длину листа $d = |p_0 - p_5|$, высоту окна $h_0 = d \cos(\varphi_0)$ и коэффициенты пропорций:

$$k_1 = \frac{|p_0 - p_1|}{h_0}, \quad k_2 = \frac{|p_0 - p_2|}{h_0}$$

$$m_1 = \frac{|p_1 - p_3|}{d}, \quad m_2 = \frac{|p_2 - p_4|}{d}, \quad m_3 = \frac{|p_2 - p_5|}{d} \quad (3.1)$$



Рис.7.

Составим рекурсивную функцию построения ветви папоротника.

Рекурсивные функции - такие функции, значения которых для данного аргумента вычисляются с помощью значений для предшествующих аргументов.

$f(p_0, h, \psi, \delta, side, rec)$ I

Если $\{rec = 0\} \cup \{k_2 h < \delta\}$, то выход из рекурсии

$p_1 = p_0 + [0 \ k_1 h] R(\psi)$, $p_2 = p_0 + [0 \ k_2 h] R(\psi)$ - точки ветвления

$line(p_0 p_2)$ - рисование линии в окне 0

$f(p_1, m_1 h, \psi - side(\varphi_1 + \varphi_0), -side, \delta, rec - 1)$ - построение листа в окне 1

$f(p_2, m_2 h, \psi + side(\varphi_2 + \varphi_0), side, \delta, rec - 1)$ - построение листа в окне 2

$f(p_3, m_3 h, \psi - side(\varphi_3 - \varphi_0), side, \delta, rec - 1)$ - построение листа в окне 3

При обращении к функции ей передаются данные, определяющие расположение ветви в окне:

$p_0 = [x_0 \ y_0]$ - координаты начальной точки на осевой линии окна;

h - высота ветви;

ψ - угол отклонения ветви от вертикали;

side = ± 1 - направление изгиба ветви вправо (+1) или влево (-1) от оси окна;

δ - минимальная длина ветвящегося отрезка;

rec - максимальное число рекурсий ветвления.

На каждом уровне рекурсии в текущем окне O высотой h , алгоритм вычисляет точки p_1 и p_2 , лежащие на осевой линии окна на расстояниях $|p_0 p_1| = k_1 h$ и $|p_0 p_2| = k_2 h$ от точки p_0 . Затем рисуется отрезок $p_0 p_2$ и трижды рекурсивно просчитывается с параметрами подобных окон 1, 2 и 3:

-точками ветвления p_1, p_2 и p_3

-высотами $m_1 h, m_2 h, m_3 h$

-углами отворота от осевой линии $-(\varphi_1 + \varphi_0)$, $\varphi_2 + \varphi_0$ и $-(\varphi_3 - \varphi_0)$

-направлениями изгиба листьев относительно изгиба ветви согласно схеме на рис. 8а

-параметром δ ;

-декрементированным значением $rec - 1$.

Предусматривают два альтернативных условия прекращения ветвления:

- по исчерпанию заданного числа рекурсий rec ;

- по достижению длины отрезка $k_2 h$, меньшей пороговой длины δ .

Задание $\delta = 0$ позволяет построить ветвь точно за rec рекурсий. При этом общее число отрезков, составляющих изображение ветви, равно

$$N_{rec} = 1 + 3(1 + 3(1 + \dots + (1+3))) = \sum_{i=1}^{rec} 3^{i-1} = 0,5(3^{i-1} - 1) \quad (3.2)$$

Ветвь на рис.8б построена при $rec = 5$ и состоит согласно (3.2) из 121 отрезка, причем многие из них имеют размеры меньше пиксела и просто не видны.

Задание параметра $\delta > 0$ при достаточно большом значении rec вынуждает алгоритм строить ветвь до тех пор, пока длина всех ее отрезков не станет меньше δ . Такой прием позволяет регулировать густоту ветви, глубину вложения рекурсий и сильно от нее зависящие необходимые машинные ресурсы. Оценка максимальной глубины рекурсии, необходимой для достижения разрешения δ , следует из соотношения

$$k_2 m_3^r h_0 < \delta$$

откуда получаем

$$r > \frac{\ln(\frac{\delta}{k_2 h_0})}{\ln(m_3)} = \log_{m_3} \left(\frac{\delta}{k_2 h_0} \right) \quad (3.3)$$

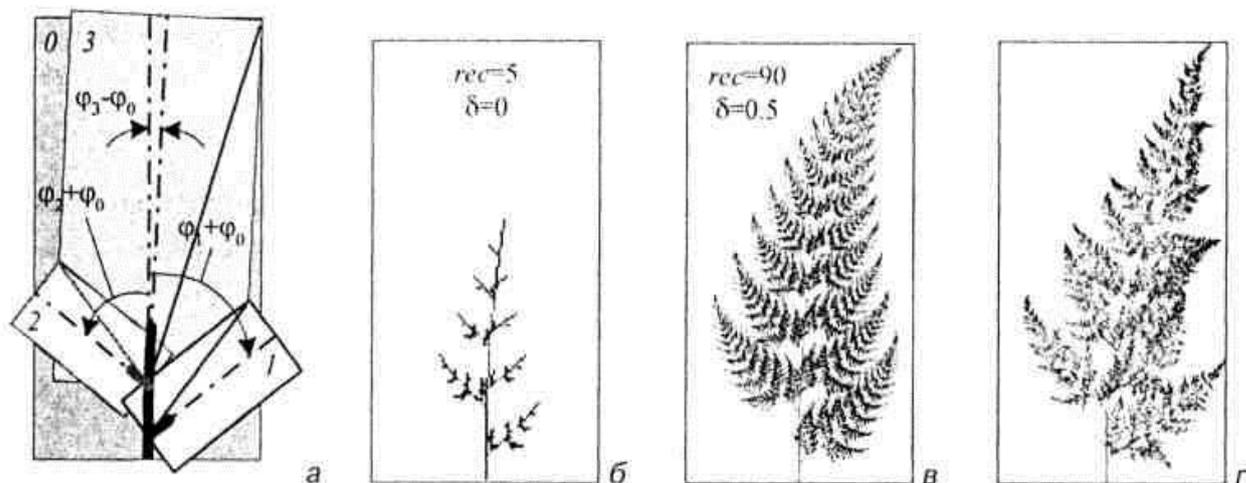


Рис.8.

Ветвь папоротника на рис. 8в построена по угловым измерениям оригинала ветви (рис. 7) и коэффициентам (3.1.):

$$\varphi_0 = 14.9^\circ, \varphi_1 = 37.7^\circ, \varphi_2 = 36.8^\circ, \varphi_3 = 17.6^\circ; \quad (3.4.)$$

$$k_1 = 0.0483, k_2 = 0.162, m_1 = 0.371, m_2 = 0.336, m_3 = 0.849. \quad (3.5.)$$

Высота экранного окна задана равной $h = 200$, минимальная длина рисуемого отрезка $\delta = 0.5$. Фактическая глубина рекурсии и количество цветовых оттенков изображения составили $r = 30$, что точно удовлетворяет оценке (3.3.):

$$rec > \frac{\ln(0,0077)}{\ln(0,849)} = 29,8$$

Для повышения реалистичности изображения ветви можно с переходом на следующий уровень рекурсии уменьшать толщину рисуемой линии, а также изменять ее цвет. Наиболее реалистичные фрактальные изображения, лишенные строгой гармонии, так не свойственной объектам природы, строятся методом управляемой случайности.

Суть метода в том, что в детерминированный процесс сознательно вносятся помехи с желаемыми стохастическими параметрами. В алгоритме построения ветви папоротника можно, например, случайно смещать точки ветвления p_1 и p_2 вдоль осевой линии или вносить небольшие изменения в углы ветвления $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. На рис.8г показана реализация алгоритма со случайными воздействиями на углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ из (3.4.) аддитивных помех $rnd(20^\circ) - 10^\circ$, равномерно распределенных в интервале $(-10^\circ, 10^\circ)$.

По алгоритмам, устроенным подобно рассмотренному, можно получать изображения фрактальной травы, кустарников и деревьев. Вся суть заключается в выборе небольшого числа параметров, определяющих форму растения. Например, функция f ; использует девять глобальных параметров $k_1, k_2, m_1, m_2, m_3, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. В совокупности с аргументами общее число скалярных данных, необходимых для построения фрактального изображения ветви папоротника, равно 16.

Таким образом, мы видим, что достаточно сложные изображения создаются с помощью чрезвычайно малого числа исходных данных. Здесь кроются богатые практические возможности фрактальной геометрии: описывая объекты на фрактальном языке, мы можем значительно уменьшить объем информации, необходимой для построения изображения, хранения его в памяти компьютера или передачи по сети. А внося в алгоритм элементы управляемой случайности, можно получать неожиданно красивые изображения

3.2. Алгебраические фракталы.

Алгебраические фракталы получают с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Наиболее изучены двухмерные процессы. Известно, что нелинейные динамические системы обладают несколькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций (повторений), зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (или как говорят - аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом, фазовое пространство системы разбивается на области притяжения аттракторов. Если фазовым является двухмерное пространство, то, окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить цветовой фазовый портрет этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные нетривиальные фрактальные структуры с причудливыми многоцветными узорами.

Алгоритм построения основан на итеративном выражении:

$$z_{n+1} = F(z_n),$$

где $F(z)$ - какая-либо функция комплексной переменной.

Разновидностью алгебраических фракталов являются так называемые, бассейны Ньютона, которые строятся по формуле:

$$z_{i+1} = z_i^3 - 1$$

К алгебраическим фракталам относят биоморфы (Рис.9). Этот термин был предложен Клиффордом Пикоувером для обозначения особым образом построенных алгебраических фракталов, внешним видом напоминающих одноклеточные организмы.



Рис.9. Биоморфы

Биоморфы получают из следующих функций:

$$z = z^z + z^6 + c$$

$$z = \sin(z^3) + c$$

$$z = z^2 + \sin(z) + c$$

$$z = z^3 + c$$

$$z = z^5 + c$$

$$z = e^z + \sin(z) + c$$

Каждый биоморф строится путем многочисленных итераций. На каждом шаге итерационного процесса результат предыдущего шага принимается за исходное значение переменной.

Когда уравнение интерпретируется графически на комплексной плоскости, результатом оказывается фигура, в которой прямые линии переходят в кривые, появляются хотя и не без деформаций, эффекты самоподобия на различных масштабных уровнях. При этом вся картина в целом является непредсказуемой и очень хаотичной. Биоморфы можно рассматривать как сокращённую версию множества Жюлиа.

Для примера рассмотрим процесс $z_{n+1} = z_n^2 + c$

Выбрав произвольное число z_0 , возведем его в квадрат и прибавим константу c для того, чтобы получить z_1 ; затем повторим вычисления для того, чтобы получить z_2, z_3 и т.д.

В первом случае начнем с простейшего из возможных значений константы c , а именно $c = 0$. Тогда при каждой итерации вычисляется точный квадрат числа: $z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \rightarrow k$. В зависимости от значения z_0 имеются три возможных варианта:

1. Если $|z_0| < 1$, то числа получаются все меньшими и меньшими, их последовательность приближается к нулю.
2. Если $|z_0| > 1$, то числа получаются все большими и большими, стремясь к бесконечности.
3. Если $|z_0| = 1$, то точки продолжают оставаться на расстоянии 1 от нуля. Их последовательности лежат на границе двух областей притяжения, в данном случае на окружности единичного радиуса с центром в нуле.

В этом случае ситуация проста: плоскость делится на две зоны влияния, а границей между ними является просто окружность.

Интересная ситуация возникает, когда выбирается ненулевое значение параметра c , например, $c = -0,1237 + 0,5607i$. Здесь для последовательности имеются также три вышеперечисленные возможности, но внутренняя точка, к которой стремится последовательность, уже не является нулем, а граница уже не является гладкой, она сильно изломана. Именно это Б. Мандельброт назвал фрактальной структурой такой границы.

Одной из характерных особенностей такой границы является ее самоподобие. Если взять любую часть границы, то можно обнаружить, что она встречается в разных местах границы и имеет разные размеры. Границы такого рода называют множествами Жюлиа.

Различные значения параметра c могут порождать разнообразные множества Жюлиа, причем малейшее изменение этого параметра нередко приводит к существенным метаморфозам. Некоторые множества Жюлиа связны, другие представляют собой «пылевидные» канторовы множества.

Существует правило, определяющее вид множества Жюлиа. Оно зависит от параметра c и связано с изображением множества Мандельброта. Множество всех точек c , для которых итерации $z_{k+1} = z_k^2 + c$ ($z_0 = 0$) остаются ограниченными при $k \rightarrow \infty$, называется множеством Мандельброта.

3.3. Стохастические фракталы

Еще одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

4. Построение фракталов.

4.1. Фрактал Мандельброта

Мандельброт исследовал предельное (при $k \rightarrow \infty$) поведение последовательности комплексных чисел:

$$z_{k+1} = z_k^2 + c, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad z_0 = c \quad (4.1a)$$

при различных значениях комплексных чисел c . Вместо арифметических операций с комплексными числами можно моделировать на плоскости xu движение точек $z_k = [x_k y_k]$, задаваемое двумя рекуррентными уравнениями координат:

$$x_{k+1} = x_k^2 - y_k^2 + c_x, \quad y_{k+1} = 2x_k y_k + c_y, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = c_x, \quad y_0 = c_y \quad (4.16)$$

Последовательность z_k с ростом числа итераций демонстрирует поведение двух типов (рис. 11.) в зависимости от выбора начальной точки $c = [c_x c_y]$. Ее элементы, эволюционируя по плоскости, либо постепенно уходят в бесконечность (1), либо всегда остаются в определенной замкнутой области, совершая циклическое движение (2) или сходясь в точку (3).

Математиками строго доказано, что если при некотором k модуль $|z_k| > r_{min}$, где $r_{min} = 2$ - минимальный радиус расходимости множества Мандельброта, то далее последовательность расходится и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$$

Множество точек c , для которых последовательность (4.1.) не расходится, называется *множеством Мандельброта*. Весьма сложно доказывается, что это множество *связно*.

Графическая интерпретация множества Мандельброта удивительно красива и бесконечно разнообразна (рис.13, рис.14.). Для ее получения зададим исходные данные итерационного процесса (4.1.):

- прямоугольное окно C с разрешением $n \times m$ точек;
- значение $r_{min} = 2$;
- максимальное число итераций k_{max}

Условимся, что если точка z_k вышла за пределы круга радиуса r_{min} , то расходимость достигнута за $k < k_{max}$ итераций и процесс (4.1) останавливается. При $|z_k| \leq r_{min}$ вплоть до $k = k_{max}$ расходимость отсутствует.

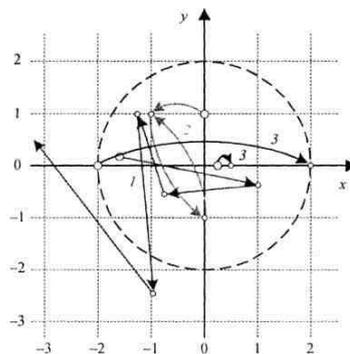


Рис. 11.

Для каждой точки $c_0 \in C$, $i = 1, n$, $j = 1, m$ запустим итерационный процесс и сформируем матрицу M , элемент которой $m_{ij} \in [1, k_{max}]$, равен номеру итерации k , на которой процесс был остановлен. Далее возможны варианты изображения фрактального множества на плоскости или в пространстве.

В плоском варианте визуализации выведем матрицу M на экран как растр, сопоставив элементам m_{ij} некоторую палитру из k_{max} цветов. Например, можно выбрать *радужную* палитру, у которой цвета и оттенки от фиолетового до красного (или градации серого цвета) распределены по диапазону чисел матрицы либо линейно (чем быстрее расходится последовательность в некоторой точке c_{ij} , тем темнее ее цвет), либо по другому закону. Яркие изображения дают палитры с чередующимися контрастными цветами.

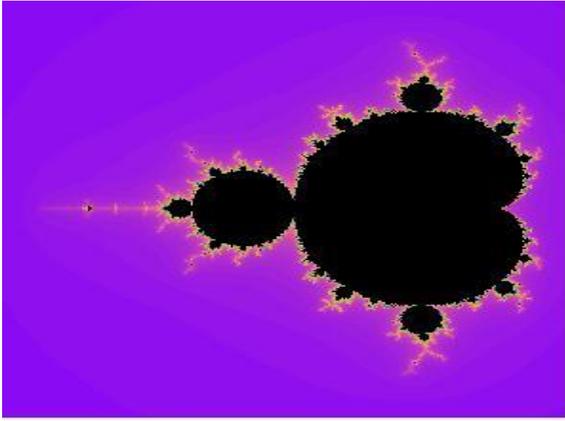


Рис.12. Множество Мандельброта

На рис.12. приведен один из примеров графического изображения множества Мандельброта. Черный цвет в середине изображения показывает, что в этих точках функция стремится к нулю - это и есть множество Мандельброта. За пределами этого множества функция стремится к бесконечности. А самое интересное - это границы множества. На границах этого множества функция ведет себя непредсказуемо – хаотично, они то и являются фрактальными.

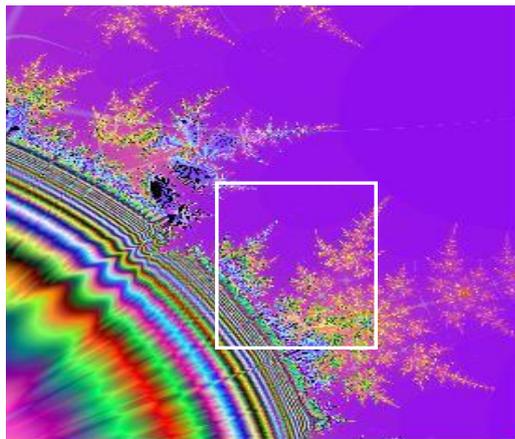


Рис. 13. Границы множества Мандельброта

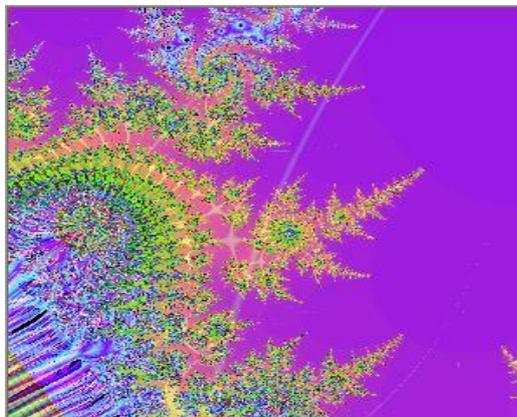


Рис.14. Увеличенные границы множества Мандельброта

4.2. Фрактал Жюлиа

Можно получить еще один алгоритмический фрактал, известный как фрактал Жюлиа на основе формулы (4.1a). Ее модификация заключается в том, что комплексное число c фиксируется, а элемент $m_i j$ матрицы M задает начальное значение z_0 , перебираемое дискретно в области S . Результат моделирования этого алгоритма в области $S \in [-1,1] + [-1,1]i$ при $c=0,36+0,36i$, называется множеством Жюлиа. (Рис.15). Естественно, возможны теоретически бесконечно глубокие погружения внутрь этого фрактального множества, где всегда будут проявляться важнейшие свойства фракталов - симметрия и самоподобие.

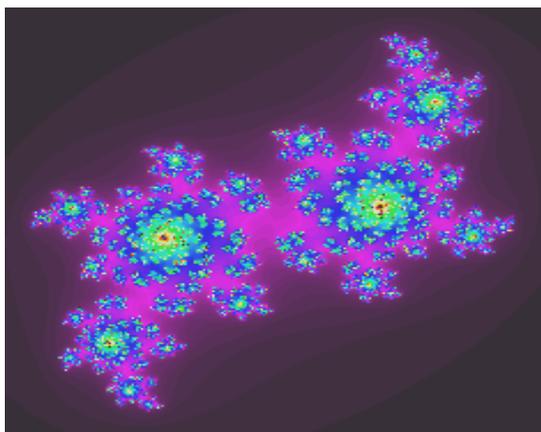


Рис.15. Множество Жюлиа

5. Примеры фрактальных изображений.

Большинство фрактальных изображений получили широкое распространение именно благодаря своим роскошным цветовым схемам.

Так как картинка – это не весь фрактал, их часто называют паттернами. Углубляться в недра фрактала можно до бесконечности (теоретически).

Фрактал, построенный по формуле $z_{i+1} = z_i^8 + c$, показан на рис.18

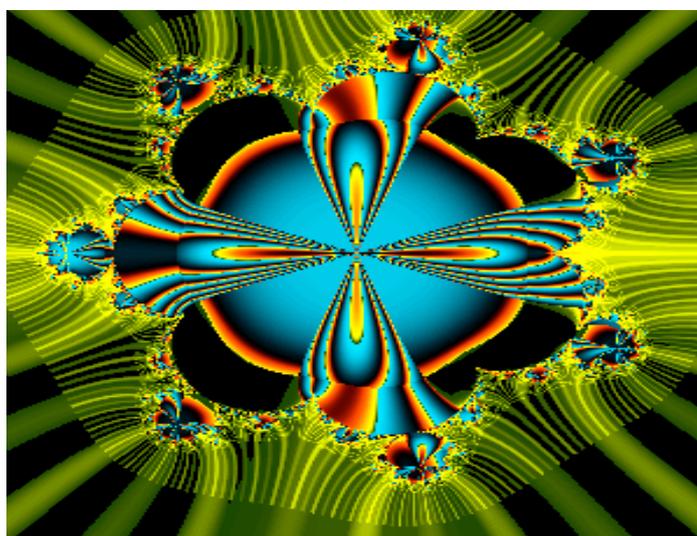


Рис. 18.

Пример фрактала, созданного Д. Абрамовым, доцентом факультета математики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета с указанием генерирующей формулы: $z = z - \frac{\sin z}{0,0000000000000001 + \cos z} \cdot \frac{z^8 - z^6 - \sin z - zc - 1}{8z^7 - 6z^5 - \cos z - c}$ показан на рис.19. Он получил название Скипетр.

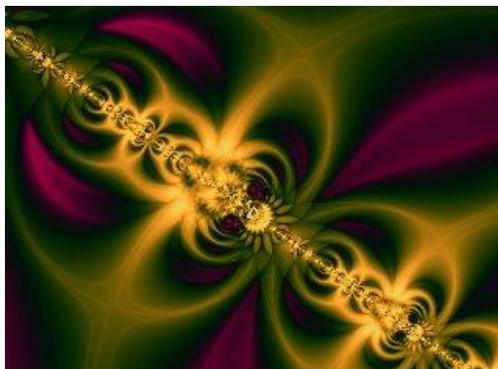


Рис. 19. Скипетр.

Следующий фрактал, показанный на рис. 20, получен по формуле $z = \left(\frac{c}{\cos z}\right)^2$ и носит название “Встреча в аквариуме”.

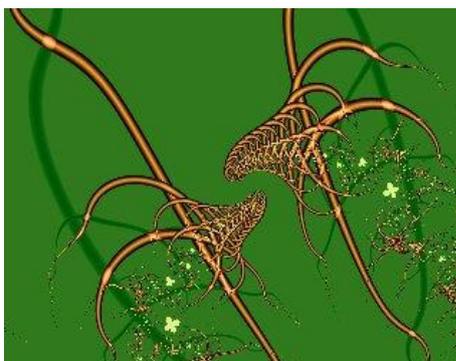


Рис. 20. “Встреча в аквариуме”

Фрактал “Иной” (рис. 21.) был получен по формуле $z = z - \frac{z^5 - z^3 - z^2 \sin z - z - \sin z}{4z^3 - z^2 \cos z - 1} + c$

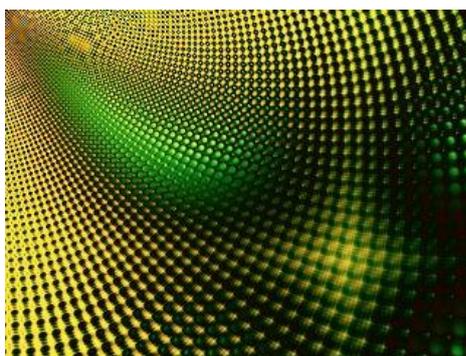


Рис. 21. “Иной”

Фрактальное изображение “Огненный цветок” (рис. 22) получен по формуле

$$z = z - \frac{z^3 \sin z - \sin z - z}{3z^2 \cos z - \cos z - 1} + c$$



Рис. 22. “Огненный цветок”

$$z = z - \frac{z^6 - z^5(1 - \sin z) - cz^4 \sin z - cz \sin z - z}{6z^5 - 5z^4 - z^5 \cos z - cz^4 \cos z - cz \cos z - 1}$$

Математическое выражение дало
фрактальное изображение, похожее на сфинкса (рис.23)



Рис. 23. Сфинкс.

6. Расчет размерности фракталов.

Независимо от природы или метода построения у всех фракталов есть одно важное общее свойство, характеризующее степень их раздробленности и предельные свойства. Это некоторое характеристическое число D , называемое *фрактальной размерностью*. Следуя идее Мандельброта, ее можно определить подсчетом числа элементов N , принадлежащих фрактальному множеству, при различных разрешениях δ - минимальных *линейных* размерах элементов. При достаточно малом δ выполняется условие

$$N \cdot \delta^D \approx const$$

Задав малые значения δ_1, δ_2 и подсчитав соответствующие числа N_1, N_2 из условия

$$N_1 \delta_1^D = N_2 \delta_2^D$$

получим оценку размерности фрактала:

$$D = \frac{\log(N_2 / N_1)}{\log(\delta_1 / \delta_2)} \quad (6.1)$$

Это соотношение приблизительное потому, что при определении принадлежности элементов объекту по принципу "да / нет" число N округляется до целого. Иначе пришлось бы учитывать дробные части элементов, что требует разрешения, меньшего δ . Поэтому правильнее будет определить предельную форму размерности:

$$D = \lim \left(\frac{\log(N_{i+1} / N_i)}{\log(\delta_i / \delta_{i+1})} \right) \text{ при } \delta_{i+1} < \delta_i \quad (6.2)$$

При выборе разрешений δ , совсем не принципиально условие их кратности. Однако, если при уменьшении разрешения в целое число раз

$$k_\delta = \frac{\delta_i}{\delta_{i+1}}$$

постоянен предельный коэффициент увеличения числа элементов

$$k_N = \lim \left(\frac{N_{i+1}}{N_i} \right)$$

то получим более простую формулу расчета размерности фрактального объекта:

$$D = \frac{\log(k_N)}{\log(k_\delta)} = \log k_\delta k_N \quad (6.3)$$

Например, если при каждом уменьшении линейного разрешения в два раза число элементов увеличивается втрое, то размерность фрактального объекта оценивается числом

$$D = \log_2 3 = 1,585$$

Вычислим по формуле (6.2) размерность плоской замкнутой фигуры с *постоянной* границей. Зададим разрешение пространства плоскости $\delta_1 = 1$, построим растр с шагом δ_1 и подсчитаем число "пикселей" растра, центры которых закрываются фигурой. Оно равно $N_1 = 9$ (рис. 32). Уменьшив разрешение до $\delta_2 = 0.5$, получим число новых "пикселей" $N_2 = 43$ (рис. 33) и размерность

$$D_1 = \log_2(43/9) \approx 2,2563$$

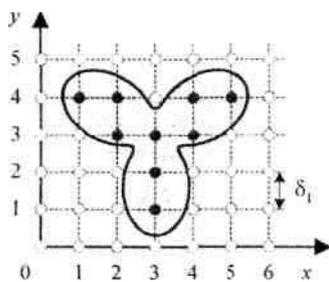


Рис.32.

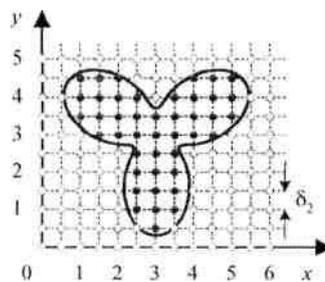


Рис.33.

Продолжая двойное уменьшение δ , получаем последовательность:

$$D_2 = \log_2(167/43) = 1,9574$$

$$D_3 = \log_2(683/167) = 2,032$$

$$D_4 = \log_2(2733/683) = 1,9962$$

$$D_5 = \log_2(10903/2733) = 1,9999$$

достаточно быстро сходящуюся к размерности плоского нефрактального объекта, равной $D = 2$.

В отличие от привычных геометрических объектов, фрактальное множество не имеет постоянной границы. Она дробится с каждым уменьшением разрешения. У аддитивных фракталов происходит приращение "вещества", у субтративных - его сокращение. В результате размерность фрактала может быть дробной. Это свойство фрактальных множеств является их особенностью.

Использование формул (6.1-6.3) предполагает, что фрактал состоит из однородных элементов, как, например, линия Коха или треугольник Серпинского. Однако не все фрактальные множества таковы. Ветвь папоротника или фрактальная ломаная линия состоят из элементов разной длины или площади. Для вычисления размерностей таких объектов существует понятие *среднего фрактального элемента* длиной δ , площадью δ^2 или объемом δ^3 . Количество фрактального "вещества" (*масса фрактала M*) в зависимости от числа степеней свободы фрактала n связано с числом средних элементов N длины δ соотношением:

$$M = N \cdot \delta^n$$

У линейного фрактала масса равна суммарной длине всех его отрезков, у площадного - сумме площадей, а у объемного - сумме объемов элементов.

Определение размерности можно сформулировать в следующей обобщенной форме:

$$D = \lim \left(\frac{n}{1 - \log(M_{i+1}/M_i) / \log(N_{i+1}/N_i)} \right) \quad (6.4)$$

где под массой $M \geq 0$ подразумевается длина линейного фрактала с $n = 1$, площадь площадного фрактала с $n = 2$ или объем объемного фрактала с $n = 3$.

Из (6.4.) следует:

- при ненулевой предельной массе фигуры ее размерность совпадает с числом степеней свободы n . Следовательно, не все фрактальные множества имеют дробные или отличные от числа степеней свободы размерности;
- если предельная масса аддитивного фрактала с $M_{i+1} > M_i$, неограниченно возрастает, то его размерность $D > n$ и может быть дробной;
- если предельная масса стремится к нулю, то такой субтративный фрактал с $M_{i+1} < M_i$, имеет размерность $D < n$ и также может быть дробной.

Рассчитаем размерности некоторых известных фрактальных объектов.

У линии Коха (рис.3.) на каждой итерации (или уровне рекурсии) один отрезок заменяется четырьмя отрезками втрое меньшей длины.

$$\delta_i = 3^{1-i}, N_i = 4^{i-1}$$

Следовательно, этот *линейный* фрактал имеет размерность

$$D = \log_3 4 \approx 1,262$$

Аналогично получаем, что прямоугольные линии Коха, имеют размерность

$$D = \log_3 5 \approx 1,465$$

То, что обе размерности больше единицы, говорит о бесконечной предельной длине этих аддитивных фракталов.

У "снежинки" Коха как площадного фрактала с уменьшением линейного разрешения $\delta_i = 3^{1-i}$ число треугольных элементов растет следующим образом:

$$N_1 = 1, N_2 = 9N_1 + 3, N_3 = 9N_2 + 12, \dots, N_{i+1} = 9N_i + 3 \cdot 4^{i-1} = 0,2(8 \cdot 9^{i-1} - 3 \cdot 4^{i-1})$$

По определению (8.2.) при $\lim_{i \rightarrow \infty} (N_{i+1} / N_i) = 9$ получим

$$D = \log_3 9 = 2$$

Таким образом, несмотря на аддитивность фрактала, его размерность n не дробная, а равна двум - размерности геометрической фигуры с постоянной границей. Этот результат объясняется конечной предельной площадью фрактала

$$M_{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{4} N_{\infty} \delta_{\infty}^2 = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0,693$$

Каждый элемент треугольника Серпинского (рис.5.) при разбиении заменяется тремя подобными треугольниками с вдвое меньшими линейными размерами. Поэтому по (8.3.) размерность этого *площадного* фрактала

$$D = \log_2 3 \approx 1,585$$

То, что она меньше двух, есть признак субтративного фрактала со стремящейся к нулю площадью. Действительно, т. к.

$$\delta_i = 2^{1-i} \text{ и } N_i = 3^{i-1}, \text{ то}$$

$$M_{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{4} N_{\infty} \delta_{\infty}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\infty} = 0$$

Аналогично получим размерность *объемного* тетраэдра Серпинского, равную

$$D = \log_2 4 = 2 < 3$$

Это признак стремящегося к нулю объема фрактала. Интересно, что предельная площадь боковой поверхности его элементов бесконечна:

$$\delta_i = 2^{1-i}, N_i = 16^{i-1}, \text{ то}$$

$$M_{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{4} N_{\infty} \delta_{\infty}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^{\infty} = \infty$$

Ветвь папоротника (Рис.7) относится к линейным фракталам с неоднородными элементами: один отрезок длиной l за рекурсию обрастает тремя отрезками длиной $m_1 l$, $m_2 l$ и $m_3 l$. С учетом коэффициентов (3.5.) относительная прирастаемая масса за одну рекурсию составляет

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 1,556$$

Подставив в (8.4.) вычисленное в (3.2.) число отрезков $N_i = 0,5(3^i - 1)$ и массу линейного фрактала

$$M_i = k_2 h_0 (i + m + m^2 + \dots + m^{i-1}) = k_2 h_0 \frac{m^i - 1}{m - 1}$$

получим размерность ветви папоротника

$$D = \frac{1}{1 - \log_3 m} \approx 1,674 > 1$$

Расчет размерности множества Мандельброта (Рис.12.) при разрешениях $\delta_i = 0,1 \cdot 2^{i-1}$ дал значения

$$D = \log_2 (N_{i+1} / N_i)$$

совершающие затухающие колебания в интервале [1.995, 2.005] вокруг предельной размерности $D = 2$. Это означает, что данный фрактал нельзя отнести ни к аддитивным, ни к субтрактивным фрактальным множествам, и он имеет конечную и ненулевую площадь предельного изображения.

7. Заключение

Фрактальные структуры иллюстрируют проявление внутреннего неравновесного состояния системы, балансирующего между порядком и хаосом. Фрактальная геометрия есть геометрия хаоса, рождающего порядок, и геометрия порядка, рождающего хаос.

Фракталы в состоянии изменить привычные представления об окружающем нас мире. Это касается самых обычных предметов: облаков, рек, деревьев и трав. Динамический хаос вносит радикальные изменения в понимание того, как эти объекты могут вести себя во времени. Скорее всего, разработаны еще не все теории на основе этих понятий. Использование фрактальной геометрии и теории хаоса может открыть новые возможности в различных областях знаний, в том числе в информационных и коммуникационных технологиях.

Обобщая вышесказанное, можно сформулировать следующие выводы: простейшие фракталы можно построить, используя всего лишь чертежную линейку; для построения сложных фракталов с присутствием хаотических (случайных) воздействий возможно с использованием современных компьютеров и специализированных программ; хаос – это не всегда беспорядок, иногда из порядка может родиться хаос; хаосом можно управлять; в мире есть еще много интересного и неизученного в области фрактальной геометрии и графики. “Трудно найти человека, равнодушного к фракталам. Многие считают, что знакомство с фрактальной геометрией подарило им совершенно неповторимые эстетические впечатления и обогатило новым научным опытом. В этом смысле фракталы безусловно оригинальны настолько, насколько это вообще возможно”. (Б. Мандельброт).

8. Литература

- 1 Дмитриев А.С. Хаос, Фракталы и информация. "Наука и жизнь" № 5, 2001 г
- 2 Дмитриев А.С, Детерминированный хаос и информационные технологии - журнал "Компьютерра" № 47, 1998.
- 3 Журнал «Наука и жизнь» № 6, 2006 г.
- 4 Левкович-Маслюк Л., На кромке хаоса и хаоса -журнал "Компьютерра" № 47, 1998.
- 5 Лоскутов А., Нелинейная динамика, теория динамического хаоса и синергетика (перспективы и приложения) -журнал "Компьютерра" № 47, 1998.
- 6 Малинецкий Г., Хаос. Тупики, парадоксы, надежды -журнал "Компьютерра" № 47, 1998.
- 7 Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы — М.: «Институт компьютерных исследований», 2002.
- 8 Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики- СПб.:БХВ-Петербург, 2003.-560 с.: ил.
- 9 Пайтген Х, Рихтер П. Красота фракталов- М.: «Мир», 1993.
- 10 Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. — М.: изд-во МГУ, 1993.
- 11 Федер Е. Фракталы. — М: «Мир», 1991.
- 12 Фракталы в физике. Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике, 1985. — М.: «Мир», 1988.
- 13 Шабаршин А.А., Введение во фракталы. 1998. Екатеринбург
- 14 Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Ижевск: «РХД», 2001.
- 15 WWW.vikipediya.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	
2. Определение фрактала	
3. Классификация фракталов	
3.1. Геометрические фракталы	
3.1.1.Кривая Коха	
3.1.2.Фрактальный треугольник	
3.1.3.Площадные геометрические фракталы	
3.1.4.Фрактал Хартера-Хейтуэя	
3.1.5.Линейные геометрические фракталы	
3.2. Алгебраические фракталы	
3.3. Стохастические фракталы.....	
4. Построение фракталов.....	
4.1. Фрактал Мандельброта	
4.2. Фрактал Жюлиа	
5. Примеры фрактальных изображений	
6. Расчет размерности фракталов.....	
7. Заключение	
8. Список литературы	